UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas
ENE./MAR. 2010

Segundo examen parcial MA1112
(Solución y pauta)

1.

a) Es falso.
$\mathsf{Dom}\, f = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 - x^2 > 0\}$ porque el logaritmo natural está definido sólo para números positivos. Al resolver la inecuación $1 - x^2 > 0$: $x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$, por tanto el dominio es el intervalo $(-1, 1)$

b) Es cierto: $e^{3\ln 2} = e^{\ln 2^3} = 2^3 = 8$

c) Es falso:
$$e^{\ln x^2 - y\ln x} = e^{\ln x^2} e^{-y\ln x} = x^2 e^{\ln x^{-y}} = x^2 x^{-y} = x^{2-y}$$

d) Es verdadero:
$$\cosh x - \operatorname{senh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x}}{2} = \frac{2e^{-x}}{2} = e^{-x}$$

2. Primero
$$\ln y = \ln\left(\frac{t}{1+t}\right)^t = t\ln\left(\frac{t}{1+t}\right) = t\ln t - t\ln(1+t) \ \text{(2 ptos.)}$$
luego
$$\begin{aligned} \frac{1}{y}y' &= \ln t + t\cdot\frac{1}{t} - \left[\ln(1+t) + t\left(\frac{1}{1+t}\right)\right] \\ &= \ln t + 1 - \ln(1+t) - \frac{t}{1+t} \ \text{(1 pto.)} \end{aligned}$$
y finalmente
$$\begin{aligned} y' &= y\left(\ln\left(\frac{t}{1+t}\right) + 1 - \frac{t}{1+t}\right) \\ &= \left(\frac{t}{1+t}\right)^t \left(\ln\left(\frac{t}{1+t}\right) + \frac{1}{1+t}\right) \ \text{(2 ptos.)} \end{aligned}$$

3.

a)

$$\begin{aligned}
\int_1^e \frac{\ln\sqrt{xe^x}}{3x}dx &= \int_1^e \frac{\frac{1}{2}\ln xe^x}{3x}dx = \frac{1}{6}\int_1^e \frac{\ln x + \ln e^x}{x}dx \\
&= \frac{1}{6}\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx + \frac{1}{6}\int_1^e dx \text{ (2 ptos.)}
\end{aligned}$$

para la primera integral hacemos la sustitución $u = \ln x$, $du = \frac{1}{x}dx$. Si $x = 1$, $u = 0$ y si $x = e$, $u = 1$. Se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_1^e \frac{\ln\sqrt{xe^x}}{3x}dx &= \frac{1}{6}\int_0^1 u du + \frac{1}{6}\int_1^e dx \text{ (2 ptos.)} \\
&= \frac{1}{6}\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 + \frac{1}{6}\Big[x\Big]_1^e \text{ (1 pto.)} \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} - 0\right) + \frac{1}{6}(e-1) \\
&= \frac{1}{12} + \frac{e}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2e-1}{12} \text{ (1 pto.)}
\end{aligned}$$

b) Hacemos la sustitución $u^2 = e^x - 1$, con $u \geq 0$, $2udu = e^x dx$, $dx = \frac{2u}{e^x}du = \frac{2u}{u^2+1}du$. Si $x = 0$, $u = 0$ y si $x = \ln 2$, $u = 1$. Se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx &= \int_0^1 u \cdot \frac{2u}{u^2+1}du \text{ (2 ptos.)} \\
&= 2\int_0^1 \frac{u^2}{u^2+1}du = 2\int_0^1 \left(\frac{u^2+1-1}{u^2+1}\right)du = 2\int_0^1 du - 2\int_0^1 \frac{du}{u^2+1} \text{ (2 ptos.)} \\
&= 2\Big[u\Big]_0^1 - 2\Big[\arctan x\Big]_0^1 = 2(1-0) - 2(\arctan(1) - \arctan(0)) \\
&= 2 - 2\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = 2 - \frac{\pi}{2} \text{ (1 pto.)}
\end{aligned}$$

4.

a)

$$\begin{aligned}
\int \cos^3(2x)\operatorname{sen}^{4/3}(2x)\,dx &= \int \cos^2(2x)\cos(2x)\operatorname{sen}^{4/3}(2x)\,dx \\
&= \int \left(1 - \operatorname{sen}^2(2x)\right)\cos(2x)\operatorname{sen}^{4/3}(2x)\,dx \text{ (1 pto.)}
\end{aligned}$$

ahora hacemos la sustitución $u = \operatorname{sen}(2x)$, $du = 2\cos(2x)\,dx$, de donde $\cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}du$. Nos queda

$$\begin{aligned}
\int \cos^3(2x)\operatorname{sen}^{4/3}(2x)\,dx &= \frac{1}{2}\int \left(1-u^2\right)u^{4/3}du = \frac{1}{2}\int \left(u^{4/3} - u^{10/3}\right)du \text{ (2 ptos.)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{7}u^{7/3} - \frac{3}{13}u^{13/3}\right) + C = \frac{3}{14}u^{7/3} - \frac{3}{26}u^{13/3} + C \text{ (1 pto.)} \\
&= \frac{3}{14}\operatorname{sen}^{7/3}(2x) - \frac{3}{26}\operatorname{sen}^{13/3}(2x) + C \text{ (1 pto.)}
\end{aligned}$$

b) Procedemos por partes: $u = \operatorname{sen}\left(\ln x^2\right)$, $du = \frac{1}{x^2}(2x)\cos\left(\ln x^2\right)dx = \frac{2}{x}\cos\left(\ln x^2\right)dx$ y $dv = dx$, $v = x$, obteniendo

$$\int \operatorname{sen}\left(\ln x^2\right)dx = x\operatorname{sen}\left(\ln x^2\right) - 2\int \cos\left(\ln x^2\right)dx \text{ (2 ptos.)}$$

la segunda integral la atacamos de nuevo por partes: $u = \cos\left(\ln x^2\right)$, $du = -\frac{2}{x}\operatorname{sen}\left(\ln x^2\right)dx$ y $dv = dx$, $v = x$, resultando

$$\int \operatorname{sen}\left(\ln x^2\right)dx = x\operatorname{sen}\left(\ln x^2\right) - 2x\cos\left(\ln x^2\right) - 4\int \operatorname{sen}\left(\ln x^2\right)dx \text{ (1 pto.)}$$

de donde se obtiene

$$5\int \operatorname{sen}\left(\ln x^2\right)dx = x\operatorname{sen}\left(\ln x^2\right) - 2x\cos\left(\ln x^2\right) + C \text{ (1 pto.)}$$

es decir

$$\int \operatorname{sen}\left(\ln x^2\right)dx = \frac{x}{5}\left(\operatorname{sen}\left(\ln x^2\right) - 2\cos\left(\ln x^2\right)\right) + C \text{ (1 pto.)}$$